الثـــــانية علوم رياضية	النهايـــــــات والإتصـــــــــال	حمـــــيد بوعيـــــون

تمرين 1

لتكن f الدالة المعرفة على IR بما يلي $f(x)=x(E(2x)-2E(x))$.

أدرس اتصال f على IR

تمرين 2 أدرس على IR اتصال الدالتين :

1) $f(x)=E(x)\sin(x)$ 2) $g(x)=E(x)\sin(\pi x)$

تمرين 3

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)E(\frac{1}{x-1}) \ ; \ x\neq 1 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

1) أدرس اتصال الدالة f .

2) أحسب $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$ $2^{ème}$ SM

تمرين 4

لتكن f دالة عددية تحقق $\exists k\in IR_+^*;\forall(x,y)\in IR^2:|f(x)-f(y)|\leq k\times|x-y|$

بين أن f دالة متصلة على IR

تمرين 5

لتكن f دالة معرفة على IR بحيث f متصلة في 0 وتحقق :

$$(\forall(x,y)\in IR):f(x+y)=f(x)f(y)$$

1) تحقق أن $(\forall(x,y)\in IR):f(y)=f(y-x)f(x)$

2) نفترض أن f لاتنعدم على IR . أحسب $f(0)$.

3) بين أن f متصلة على IR .

تمرين 6

1) لتكن $f:[a,b[\to IR$ دالة عددية بحيث $\lim_{x\to b^-} f(x)=+\infty$ أثبت أن f دالة غير مكبورة .

هل العكس صحيح ؟

2) أثبت أنه إذا كانت f دالة غير مكبورة وتزايدية فإن $\lim_{x\to b^-} f(x)=+\infty$

تمرين 7

لتكن f دالة متصلة على $[0,1]$ بحيث f(1)=f(0)=0 و $(\forall x\in[0,1]):\ f(x)\geq 0$.

بين أن $(\forall n\in IN^*)(\exists c\in[0,1]):f(c)=f(c+\frac{1}{n})$

تمرين 8

لتكن f دالة معرفة من IR^+ نحو IR^+ بحيث : f متصلة على IR^+ و $(\forall x\in IR^+):\ f(x)<x$

1) بين أن $f(0)=0$.

2) بين أن : $(\forall(a,b)\in(IR_*^{+2}))(\exists M\in[0,1[)(\forall x\in[a,b]):f(x)\leq Mx$

تمرين 9

لتكن f دالة متصلة على $[0,1]$ بحيث f(0)=f(1) .

1) نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$

بين أن المعادلة g(x)=0 تقبل حلا على الأقل في المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

2) نعتبر الدالة u المعرفة بما يلي : $u(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$ حيث $n\in IN^*$

a) بين أن $\sum_{0\leq k\leq n-1} u(\frac{k}{n})=0$.

b) استنتج أن المعادلة u(x)=0 تقبل حلا على الأقل في المجال $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$.

تمرين 10

لتكن f دالة متصلة وموجبة على IR^+ بحيث $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}<1$

بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا على الأقل في IR^+ .

تمرين 11

ليكن $n\in IN^*$ نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^{n+2}-8x^{n+1}+7x^n+36$

1) نضع $h(x)=2f(x)-f(x+1)-f(x-1)$

بين أنه $(\exists c\in]1,7[):h(c)=0$

2) استنتج أنه توجد 3 نقط A و B و C من المنحنى C_f أفاصيلها a و b و c على التوالي بحيث :

a) B منتصف $[AC]$

b) $b-a=1$

تمرين 12

1) بين أنه لكل n من IN^* المعادلة $Arc\cos(x)-x^n=0$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,1[$.

2) قارن العددين a_n و $\frac{1}{2}$.

3) بين أنه : $(\forall n\in IN^*):a_{n+1}>a_n$.

تمرين 13

لتكن f دالة عددية متصلة على $[a;b]$ حيث $\forall x\in[a,b]: f(x)>0$.

أثبت أن $\exists m>0, f(x)\geq m$

تمرين 14

لتكن f دالة متصلةعلى $\mathbb{R}$ بحيث $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}f(x)=a\\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=b\end{cases}$ و $ab<0$

1) بين أن: $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2/f(\alpha).f(\beta)<0$

2) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الاقل حلا في $\mathbb{R}$.

تمرين 15

لتكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$

نفترض أن f تزايدية على $]0,+\infty[$ و الدالة g المعرفة ب $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ تناقصية على $]0,+\infty[$.

1) ليكن $x_0\in]0,+\infty[$. بين أن $(\forall x>x_0):0\leq f(x)-f(x_0)\leq(x-x_0)g(x_0)$

و $(\forall x<x_0):(x-x_0)g(x_0)\leq f(x)-f(x_0)\leq 0$

2) بين أن f متصلة على $]0,+\infty[$.

تمرين 16

f دالة متصلة على $]a,b[$ مع $\begin{cases}\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty\\ \lim_{x\to b^-}f(x)=-\infty\end{cases}$

1) بين أنه: $\exists(\alpha,\beta)\in]a,b[^2/f(\alpha).f(\beta)<0$

2) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الاقل حلا في المجال $]a,b[$.

3) لتكن g دالة متصلة على $[a,b]$.بين $\exists c\in]a,b[/f(c)=g(c)$

4) بين
$$\exists c \in]a,b[\ / \sqrt{\frac{b-c}{c-a}} - \sqrt{\frac{c-a}{b-c}} = \sqrt{(b-c)(c-a)}$$

تمرين 17

نعتبر الدالة f $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x}$

1) حدد حيز تعريف الدالة f .
2) حل في IR^+ المعادلة $f(x) = x$
3) a) بين أن الدالة f تزايدية قطعا من المجال $[0,+\infty[$
b) بين أن الدالة f تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده
c) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 18

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = Arc\sin(\frac{\sqrt{2}x-1}{x^2-\sqrt{2}x+1})$

1) حدد حيز تعريف الدالة f .
2) نضع $t = 2Arc\tan(\sqrt{2}x-1)$ لكل x من IR.

بين أن : $f(x) = \begin{cases} 2Arc\tan(\sqrt{2}x-1) & ; \ 0 \le x \le \sqrt{2} \\ \pi - 2Arc\tan(\sqrt{2}x-1) & ; \ x > \sqrt{2} \\ -\pi - 2Arc\tan(\sqrt{2}x-1) & ; \ x < 0 \end{cases}$

3) حل في IR المعادلة : $f(x) = 2Arc\tan(1-\sqrt{2})$.
4) ليكن g قصور الدالة f على المجال $]\sqrt{2},+\infty[$.
a) بين أن g تقابل من $]\sqrt{2},+\infty[$ نحو مجال J.
b) حد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 19

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{Arc\sin(x)}{Arc\cos(x)}$

1) حدد حيز تعريف الدالة f واحسب النهايات عند محدات D_f .
2) a) بين أن $(\forall x \in [-1,1]) : Arc\sin(x) + Arc\cos(x) = \frac{\pi}{2}$
b)استنتج أن f تقابل من $[-1,1[$ نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$

تمرين 20

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} f(x) = xArc\tan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right); x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1)ادرس زوجية الدالة f .
2)ادرس اتصال f في الصفر.
3) ليكن $x > 0$ ، بين أن: $f(x) = \frac{\pi x}{2} - \frac{x}{2}Arc\tan(x)$ واستنتج صيغة مبسطة ل: $f(x)$ على $\mathbb{R}^{*-}$.
4) نعتبر المعادلة : $(E) \quad Arc\tan\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right) = \frac{5\pi}{12}$

بين أن : $(E) \Leftrightarrow f(\sqrt{x}) = \frac{5\pi\sqrt{x}}{12}; si \ x > 0$ أعط حلول المعادلة (E) في $\mathbb{R}^{*+}$.

تمرين 21

حل في IR المعدلتين :

1) $Arc\tan 2x + Arc\tan(3x) = \frac{\pi}{4}$ 2) $Arc\tan(\frac{x^2-1}{x^2}) + Arc\tan(x) = \frac{\pi}{2}$

تمرين 22

نعتبر في IR المعادلة $(E) : \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$

1) بين المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا وأن هذا الحل ينتمي إلى $]0,1[$.

2) حل المعادلة (E) .

تمرين 23

أثبت المتساويات التالية :

1) $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$ (لاحظ أن $0 \le \arctan(\frac{1}{5}) \le \frac{\pi}{8}$)

2) $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$

3) $(\forall x \in [1-,1]) \ : \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$

4) $(\forall x > 0) \ : \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$

5) $(\forall x < 0) \ : \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$

6) $(\forall x < 0) \ : \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$

7) $(\forall x \in]0,1]) \ : \arcsin(2x-1) + 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{\pi}{2}$

تمرين 24

أحسب $\arctan 2 + \arctan 3$

تمرين 25

ارسم التمثيل المبياني للدالة f : $f(x) = Arc\cos(\cos x) + \frac{1}{2}Arc\cos(\cos 2x)$

تمرين 26

نعتبر العدد $x = \arcsin\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

أحسب $\cos(4x)$ واستنتج قيمة x .